Das Volumen eines Glases

Der Umriss eines Sektkelches gehorcht der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{\sqrt{6}}{4}x^2.$$

Bei welcher Höhe h beträgt das Volumen des Kelches 0,2l?

Lösung
Angelehnt an das Prinzip des Cavalieri ergibt sich:

$$V = \int_0^h A(y)dy$$

$$= \int_0^h \pi x^2 dy$$

(1) mit $y = \frac{\sqrt{6}}{4}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{\sqrt{6}}y$ folgt

$$= \int_0^h \pi \frac{4}{\sqrt{6}} y dy$$

$$= \pi \frac{4}{\sqrt{6}} \int_0^h y dy$$

$$= \pi \frac{4}{\sqrt{6}} \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^h$$

$$= \pi \frac{4}{\sqrt{6}} \left[\frac{1}{2}h^2 - 0\right]$$

$$= \pi \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{1}{2}h^2 = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot h^2$$

Also: $$\boxed{V(h) = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot h^2}$$

Da V=0,2l=200ml=200cm^3 sein soll, ergibt sich:

$$200 = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot h^2 \Leftrightarrow \mathbf{h} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 200} \approx \mathbf{7{,}2cm}$$

Zusammenfassung: Sei eine Funktion f(x) $x \in [a,b]$ gegeben.

y-Achsen-Rotation	x-Achsen-Rotation
$V(y) = \pi \int_{y_a = f(a)}^{y_b = f(b)} x^2 dy$	$V(x) = \pi \int_a^b y^2 dx$

Beachte: f(x) muss streng monoton sein, damit der Rotationskörper um die y-Achse berechnet werden kann (Umkehrfunktion bei (1)).